www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1989

MATHEMATIQUES II

M et P'

Dans tout le problème, E désigne un espace affine réel euclidien (de dimension 2 dans la première partie, de dimension 3 dans les autres parties), $\vec{E}$ désigne l'espace vectoriel euclidien associé à E. On note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire de tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\vec{E}$ et $|\vec{v}|$ la norme euclidienne de tout vecteur $\vec{v}$ de $\vec{E}$. Pour tout endomorphisme f de $\vec{E}$, par "valeur propre de f" on entend une racine **réelle** de l'équation caractéristique de f ; l'endomorphisme adjoint de f est noté f*.

La première partie introduit, dans le cadre plus simple du plan, certaines idées qui sont développées dans les parties suivantes, mais ces dernières peuvent être traitées indépendamment d'elle.

Première Partie

Dans toute cette partie E est supposé de dimension 2 ; c'est donc un plan affine euclidien.

On donne deux constantes distinctes non nulles p et q. On fixe dans E un repère $R = (0 ; \vec{i}, \vec{j})$ **quelconque** ; on désigne par D la droite passant par O et dirigée par $\vec{i}$, par Δ la droite passant par O et dirigée par $\vec{j}$. Les coordonnées du point générique M du plan E dans le repère R seront désignées par x et y.

Pour tout automorphisme g de $\vec{E}$ et pour tout point M de E autre que O, on note $d_g(M)$ la droite affine passant par M et dirigée par $g(\overrightarrow{OM})$.

I.1. Un point M distinct de O étant donné, on cherche une droite d issue de M ayant la propriété suivante : il existe un point A commun à Δ et d et un point B commun à D et d tels que : $\frac{\overline{AM}}{p} = \frac{\overline{BM}}{q}$.

a) L'existence d'une telle droite étant supposée, calculer en fonction des coordonnées x et y de M dans R les coordonnées dans ce repère de A et B et celles du vecteur $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AM}}{p} = \frac{\overrightarrow{BM}}{q}$.

Tourner la page .../...

b) En déduire que, si f est l'automorphisme de $\vec{E}$ qui transforme $\vec{i}$ en $\frac{\vec{i}}{p}$ et $\vec{j}$ en $\frac{\vec{j}}{q}$, la seule droite répondant à la question est $d_f(M)$.

I.2. Soit g un automorphisme de $\vec{E}$.

a) Caractériser les points M de E tels que $d_g(M)$ passe par O. Que dire de g si, pour tout M distinct de O, $d_g(M)$ passe par O ?

b) On suppose que g possède deux valeurs propres distinctes. A l'aide de la question I.1, caractériser $d_g(M)$ parmi les droites issues de M.

I.3. On suppose dans cette question et les trois suivantes que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont unitaires et l'on désigne par θ l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$.

Une tige rectiligne T, sur laquelle on a choisi une orientation et marqué trois points A, B, M tels que $\overline{AM} = p$ et $\overline{BM} = q$, se déplace dans E et prend toutes les positions compatibles avec les conditions suivantes : A reste sur Δ et B reste sur D. On se propose d'étudier la courbe S décrite par M.

a) f désignant comme en (I.1.b) l'automorphisme de $\vec{E}$ qui transforme $\vec{i}$ en $\frac{\vec{i}}{p}$ et $\vec{j}$ en $\frac{\vec{j}}{q}$, montrer qu'un point m de E est une position prise par le point M de la tige si et seulement si $\left|f\left(\overrightarrow{Om}\right)\right| = 1$.

b) Etablir qu'une équation de S dans le repère R est :

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + 2\cos\theta\,\frac{xy}{pq} - 1 = 0$$

c) Montrer que l'application qui à un vecteur $\vec{v}$ quelconque de $\vec{E}$ associe $\left|f\left(\vec{v}\right)\right|^2$ est une forme quadratique définie positive.

En déduire qu'il existe un repère orthonormal $(O ; \vec{I}, \vec{J})$ et deux réels λ, μ tels que pour tout vecteur $\vec{v} = X\vec{I} + Y\vec{J}$ on ait :

$$\left|f\left(\vec{v}\right)\right|^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2$$

d) Montrer que S est une ellipse. Montrer que $|pq|$ est égal au produit des demi-longueurs des axes de S.

I.4. Comment choisir p, q et θ pour que S soit un cercle ? Les explications géométriques seront appréciées.

I.5. On se limite, dans cette seule question, au cas où $p = -q$ et $q > 0$, D et Δ n'étant pas orthogonales.

a) Que dire alors de la position de M par rapport à A et B ?

b) Déterminer les axes de S et les demi-longueurs a et b de ses axes.

c) Faire une figure dans le cas $\theta = \frac{\pi}{3}$, en prenant 3 cm pour q.

ATTENTION : dans la suite les parties entre [ ] ne concernent que les candidats M et les parties entre { } ne concernent que les candidats P'

I.6.a) On revient au cas général étudié en I.3. M étant un point de S, on définit les points L et N par $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AM}$. Montrer que L et M appartiennent à deux cercles que l'on précisera. Que peut-on dire des directions des droites (L M) et (N M) ?

En déduire une construction géométrique de M ; on décrira cette construction avec précision et on montrera qu'elle fournit les points de S et ceux-là seulement .

[b) Donner une construction des points de S où la tangente à S est parallèle à D ou Δ.

c) On suppose ici $q = 2p$, $p > 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ et l'on prend 3 cm pour valeur de p. Faire une figure représentant D, Δ, les cercles décrits par L et N, les points d'intersection de S avec D et Δ et les points de S où la tangente est parallèle à D ou Δ, ainsi que les traits ayant permis d'obtenir ces derniers. A l'aide de ces éléments et de la construction de quelques autres points, obtenir un tracé approximatif de S.]

Dans toute la suite du problème, E et $\vec{E}$ sont désormais supposés de dimension 3.

Tourner la page .../...

Deuxième Partie

On donne trois constantes p, q, r non nulles et deux à deux distinctes. On fixe dans E un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **quelconque**. On désigne par f l'automorphisme de $\vec{E}$ qui transforme $\vec{i}$ en $\frac{\vec{i}}{p}$, $\vec{j}$ en $\frac{\vec{j}}{q}$, $\vec{k}$ en $\frac{\vec{k}}{r}$. Pour tout point M de E autre que O, la droite passant par M et dirigée par $f(\overrightarrow{OM})$ est encore notée $d_f(M)$.

II.1. Un point M distinct de O étant donné, on cherche une droite d issue de M ayant les propriétés suivantes : il existe un point A commun à d et au plan $(O ; \vec{j}, \vec{k})$, un point B commun à d et au plan $(O ; \vec{i}, \vec{k})$ et un point C commun à d et au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ tels que : $\frac{\overline{AM}}{p} = \frac{\overline{BM}}{q} = \frac{\overline{CM}}{r}$

Etablir que, si une droite d répond à la question, on a alors :

$$\frac{1}{p}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{q}\overrightarrow{BM} = \frac{1}{r}\overrightarrow{CM} = f(\overrightarrow{OM})$$

En déduire qu'il existe une droite et une seule possédant les propriétés requises et que c'est $d_f(M)$.

Que dire de $d_f(M)$ lorsque M est dans un plan de coordonnées et lorsque M est sur un axe de coordonnées ?

II.2. On considère une tige rectiligne mobile T, sur laquelle on a choisi une orientation et marqué 4 points A, B, C, M tels que $\overline{AM} = p$, $\overline{BM} = q$, $\overline{CM} = r$; cette tige prend toutes les positions compatibles avec les conditions suivantes : A reste dans le plan $(O ; \vec{j}, \vec{k})$, B reste dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{k})$, C reste dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On se propose d'étudier l'ensemble σ des positions prises par M.

a) Soit m un point de E. Montrer qu'il appartient à σ si et seulement si $|f(\overrightarrow{Om})| = 1$.

b) Montrer qu'une équation de σ est aussi $\overrightarrow{Om} \cdot f^* f(\overrightarrow{Om}) = 1$

II.3. Soit g un automorphisme de $\vec{E}$.

a) Etablir que g^*g est autoadjoint et a trois valeurs propres (distinctes ou non) strictement positives, qu'on notera α, β, γ.

b) Montrer que l'ensemble des points m de E tels que $|g(\overrightarrow{Om})| = 1$ est un ellipsoïde S_g. Donner les demi-longueurs des axes de S_g en fonction de α, β, γ. Quel rôle jouent pour S_g les directions propres de g^*g ?

II.4. On revient à l'étude de l'ensemble σ étudié en II.2.

a) Montrer que σ est un ellipsoïde.

b) Calculer en fonction de p, q, r le produit des demi-longueurs des axes de σ.

II.5. On poursuit dans cette question l'étude du problème posé en II.2, en supposant de plus que le repère $R = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormal**.

a) Déterminer une équation de σ dans le repère R.

b) (x, y, z) désignant les coordonnées d'un point M de σ, donner les coordonnées des points A, B, C correspondants.

c) En déduire l'ensemble des positions prises respectivement par A, B, C lorsque M décrit σ ; ces ensembles seront désignés par U_A, U_B, U_C.

On se place dans le cas p = - 1, q = 1, r = 2 et l'on prend comme unité 2 cm. Le point M_0 de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ est alors sur σ. Représenter la projection orthogonale sur le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ de σ, U_A, U_B, U_C, M_0, A_0, B_0, C_0 où A_0, B_0, C_0 sont les points A, B, C correspondants à M_0.

II.6. On étudie dans cette seule question le déplacement d'une tige matérielle T sur laquelle on a choisi une orientation et marqué 3 points A, C, M tels que $\overline{AM} = p$, $\overline{CM} = r$, où p et r sont des constantes distinctes non nulles ; cette tige prend toutes les positions compatibles avec les conditions suivantes : A reste sur la droite $(O ; \vec{k})$, C reste dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Etablir qu'alors M décrit encore un ellipsoïde. Dans quel cas obtient-on une sphère ?

Tourner la page .../...

Troisième Partie

Pour tout automorphisme g de $\vec{E}$, on note S_g l'ensemble des points M de E tels que $|g(\overrightarrow{OM})| = 1$. S_g est un ellipsoïde (Cf. II.3).

III.1. Soit g et h deux automorphismes de $\vec{E}$. Etablir l'équivalence des propriétés suivantes :

a) $S_g = S_h$

b) Il existe ω, automorphisme orthogonal de E, tel que $h = \omega g$.

III.2. On donne un repère **orthonormal** d'origine O, $\Omega = (O ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et un ellipsoïde Σ d'équation dans Ω :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

On appelle s l'automorphisme qui aux vecteurs $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ associe respectivement $\frac{\vec{I}}{a}, \frac{\vec{J}}{b}, \frac{\vec{K}}{c}$. Montrer l'équivalence des propriétés a), b), c) :

a) $S_f = \Sigma$,

b) Il existe un automorphisme orthogonal u de $\vec{E}$ tel que $f = us$.

c) $\left(a\, f(\vec{I}), b\, f(\vec{J}), c\, f(\vec{K})\right)$ est une base orthonormale.

III.3. Les hypothèses et notations sont celles de la question précédente. Soit f un automorphisme de $\vec{E}$ tel que $S_f = \Sigma$.

a) On suppose f diagonalisable, les trois valeurs propres étant distinctes. Déduire de la partie II un mode de génération, associé à f, de Σ par déplacement d'une tige rectiligne soumise à des conditions que l'on précisera.

[**b) On suppose f diagonalisable, ayant une valeur propre double et une valeur propre simple. Donner un mode de génération de Σ analogue à celui envisagé au (II.6).**]

{ b) Dans le cas où Σ est une sphère, peut-on trouver f ayant trois valeurs propres distinctes et telle que $S_f = \Sigma$? }

[**c) Dans le cas où Σ est une sphère, peut-on trouver f ayant trois valeurs propres distinctes et telle que $S_f = \Sigma$? Quels sont les f diagonalisables ayant une valeur propre double et une valeur propre simple et tels que $S_f = \Sigma$? Quel mode de génération en résulte-t-il pour Σ ?**]

III.4. Les hypothèses et notations sont toujours celles du III.2.

a) On suppose que f a, dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que $S_f = \Sigma$. L'automorphisme f est-il diagonalisable ? Peut-on associer à f une génération du type étudié en II.2. [ou en II. 6 ?]

b) On suppose ici que l'on a : $a = b = 1$, $c = 4$.

On prend f transformant $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ respectivement en $\vec{I}, \vec{K}, \frac{\vec{J}}{4}$. Etablir que $S_f = \Sigma$. Déterminer les valeurs propres et les directions propres de f. En déduire une génération de Σ du type étudié au II.2. On précisera, avec les notations de la partie II, les distances mutuelles des points M, A, B, C ; on fera une figure en projection sur le plan $(O ; \vec{J}, \vec{K})$.

[c) On se place maintenant dans le cas où Σ a pour équation

$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{4} + \frac{Z^2}{8} - 1 = 0$$

On prend ici f transformant $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ en $\frac{\vec{K}}{\sqrt{2}}, \frac{\vec{J}}{2}, \frac{\vec{I}}{2\sqrt{2}}$ respectivement.

Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de f et en déduire une génération de Σ. On fera un croquis perspectif.]

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail